

巴中市普通高中 2023 级“零诊”数学试题

参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	B	C	C	D	B

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	BC	ACD	AB

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

题号	12	13	14
答案	24	$\frac{1}{4}$	$\left[-\frac{1}{e^2}-1, \frac{e^2}{4}\right]$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

解析：(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中： $S_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = 3a_2 = 9$ ，

则 $a_2 = 3$ ， $a_5 = 2a_2 + 3 = 9$ 3 分

公差 $d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = \frac{9 - 3}{3} = 2$ ， $a_n = a_2 + (n - 2)d = 3 + (n - 2) \times 2 = 2n - 1$ 5 分

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n = 2n - 1$ 6 分

(2) 由(1)得: $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 8 分

则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \cdots \cdots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

由于 $n \in N^*$, 则: $T_n < \frac{1}{2}$ 13 分

16. (15 分)

解析: (1) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $B_1B \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 面 ABC , 则

$B_1B \perp BC$

又 $\angle ABC = 90^\circ$, 即 $AB \perp BC$, 又 $B_1B \cap AB = B$

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1 2 分

又 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1 , 所以 $BC \perp AB_1$

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB$, 则四边形 ABB_1A_1 为正方形

所以 $AB_1 \perp A_1B$, 又 $BC \cap A_1B = B$, 所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC 4 分

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $A_1C \perp AB_1$ 6 分

(2) 由(1)知 BA, BC, BB_1 两两互相垂直,

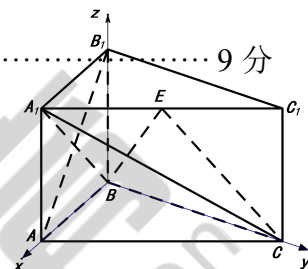
故以 BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

由于 $AC = 2AB$, 设 $AB = AA_1 = 2$, 则 $BC = 2\sqrt{3}$,

$B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,2\sqrt{3},0), B_1(0,0,2), A_1(2,0,2), E(1,\sqrt{3},2)$ 9 分

设平面 EBC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, $\vec{BC} = (0, 2\sqrt{3}, 0)$, $\vec{BE} = (1, \sqrt{3}, 2)$

则: $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC} = 2\sqrt{3}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BE} = x + \sqrt{3}y + 2z = 0 \end{cases}$, 取 $z = -1$, 则 $y = 0, x = 2$, 得 $\vec{m} = (2, 0, -1)$ 11 分



由(1)知 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC , 则平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{AB_1} = (-2, 0, 2)$ 12 分

由图可知二面角 A_1-BC-E 的平面角为锐角, 记为 θ .

则: $\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{AB_1} \rangle \right| = \frac{|2 \times (-2) + (-1) \times 2|}{\sqrt{4+1} \times \sqrt{4+4}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 14 分

即二面角 A_1-BC-E 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 15 分

17. (15 分)

解析: (1) 表中数据入下:

数学成绩	语文成绩		合计
	不优秀	优秀	
优秀	48	36	84
不优秀	24	12	36
合计	72	48	120

..... 2 分

零假设为 H_0 ：数学成绩与语文成绩无关联；

根据表中数据，计算得到 $\chi^2 = \frac{120 \times (48 \times 12 - 36 \times 24)^2}{72 \times 48 \times 84 \times 36} = \frac{20}{21} \approx 0.9524 < 6.635 = x_{0.010}$.

..... 4 分

依据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，没有充分证据推断出 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为数学成绩与语文成绩无关联；

..... 6 分

(2) 由题意得分层随机抽样比为 4:3，

则语文成绩不优秀、优秀的学生分别抽取 4 人，3 人

X 的取值可能为 0, 1, 2, 3, $P(X=k) = \frac{C_3^k C_4^{3-k}}{C_7^3}, k=0,1,2,3$ 8 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

..... 10 分

数学期望为： $E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}$ 12 分

方差为： $D(X) = (0 - \frac{9}{7})^2 \times \frac{4}{35} + (1 - \frac{9}{7})^2 \times \frac{18}{35} + (2 - \frac{9}{7})^2 \times \frac{12}{35} + (3 - \frac{9}{7})^2 \times \frac{1}{35} = \frac{24}{49}$

..... 15 分

18. (17 分)

解析：(1) $f'(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$,

由已知： $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}$ ，得： $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ 3 分

此时, $f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$,

令 $f'(x) < 0$, 得: $x < -1$ 或 $1 < x < 2$; $f'(x) > 0$, 得: $-1 < x < 1$ 或 $x > 2$;

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值; 在 $x=2$ 处取得极小值, 符合题意,

故 $a=2, b=-1$ 5 分

(2) 由 (1) 知: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$, 则 $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

易得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 在 $[1,2]$ 上单调递减, 在 $[2,3]$ 上单调递增.

..... 7 分

$$f(0) = c, f(1) = \frac{13}{12} + c, f(2) = \frac{2}{3} + c, f(3) = \frac{15}{4} + c,$$

$$f(x)_{\max} = \max\{f(1), f(3)\} = f(3) = \frac{15}{4} + c = M,$$

$$f(x)_{\min} = \min\{f(0), f(2)\} = f(0) = c = m, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } M \cdot m = \left(\frac{15}{4} + c\right)c = \frac{19}{4}, \text{ 即: } 4c^2 + 15c - 19 = 0,$$

$$\text{又 } c > 0, \text{ 所以: } c = 1 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

(3) 因为 $g(x)$ 在 $[0,3]$ 上单调递减, 则在 $[0,3]$ 上 $g'(x) = f'(x) - k \leq 0$, $g'(x) = 0$ 仅在端点处成立. 13 分

$$\text{即 } k \geq f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ 在 } [0,3] \text{ 上恒成立} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$k \geq f'(x)_{\max} = \max\{f'(0), f'(3)\} = \max\{2, 8\} = 8. \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

即 k 的取值范围为: $[8, +\infty)$ 17 分

19. (17 分)

解析 (1) 由已知: $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \\ 2c = 2\sqrt{5} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$ 2 分

解得: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$, 则双曲线 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 4 分

(2) 联立方程 $\begin{cases} y = x + t \\ x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, 消 x 得: $3x^2 + 8tx + 4t^2 + 4 = 0$

$\Delta = 64t^2 - 12(4t^2 + 4) = 16(t^2 - 3) > 0$, $t < -\sqrt{3}$ 或 $t > \sqrt{3}$ 6 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8t}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{4t^2 + 4}{3} \end{cases}$ 7 分

则: $|AB| = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$
 $= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{16(t^2 - 3)}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 9 分

解得: $t = \pm 2$ 满足 $\Delta > 0$, 所以 $t = \pm 2$ 10 分

(3) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$

设在 A 处的切线方程为: $y = k(x - x_1) + y_1$, 代入 $x_1^2 - 4y_1^2 = 4$ 得

$(1 - 4k^2)x^2 - 8k(y_1 - kx_1)x - 4(y_1 - kx_1)^2 - 4 = 0$, 令 $\Delta = 0$, 整理得

$(x_1^2 - 4)k^2 - 2x_1 y_1 k + y_1^2 + 1 = 0$, 解关于 k 的二次方程, 其

$$\Delta = 4x_1^2 y_1^2 k - 4(x_1^2 - 4)(y_1^2 + 1) = 16y_1^2 - 4x_1^2 + 16 = 0, \text{ 则 } k = \frac{2x_1 y_1}{2(x_1^2 - 4)} = \frac{x_1 y_1}{4y_1^2} = \frac{x_1}{4y_1},$$

..... 13 分

所以曲线 C 在 A 处的切线方程为： $y - y_1 = \frac{x_1}{4y_1}(x - x_1)$ ，又 $\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1$ ，得：

$x_1 x - 4y_1 y = 4$ ；同理，曲线 C 在 B 处的切线方程为： $x_2 x - 4y_2 y = 4$ 15 分

又 $M(x_0, y_0)$ 为两切线的交点，则： $\begin{cases} x_1 x_0 - 4y_1 y_0 = 4 \\ x_2 x_0 - 4y_2 y_0 = 4 \end{cases}$

即 A 、 B 都在直线 $x_0 x - 4y_0 y = 4$ 上，又 A 、 B 都在直线 $y = kx - 3k$ 上，

而 $y = kx - 3k$ 过定点 $(3, 0)$ ，所以 $3x_0 = 4$ ， $x_0 = \frac{4}{3}$ 16 分

综上，点 M 的轨迹方程为： $x = \frac{4}{3}$ 17 分

注：另法 1：对 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 求导得： $\frac{x}{2} - 2yy' = 0$ ，即 $y' = \frac{x}{4y}$ ，则在 A 处的切线方

程 $k = \frac{x_1}{4y_1}$

另法 2：直接写出曲线 C 在 A 处的切线方程为： $\frac{x_1 x}{4} - y_1 y = 1$ ，即 $x_1 x - 4y_1 y = 4$ ；

曲线 C 在 B 处的切线方程为： $\frac{x_2 x}{4} - y_2 y = 1$ ，即 $x_2 x - 4y_2 y = 4$ 请酌情考虑扣分。