

树德中学高 2023 级高三上学期 10 月阶段性测试数学试题参考答案

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	B	A	D	B	C	C	ACD	CD	ABD

二. 填空题

12. $\sqrt{3}$ 13. $\frac{-4\sqrt{3}}{13}$ 14. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

三. 解答题

15. (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q
由题意得 $\frac{16}{q} + 16 + 16q = 56$,2 分
解得 $q = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ 3 分
因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $q = 2$ 4 分
所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 2^{n+2}$, 即 $a_n = 2^{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ 6 分

(2) 因为 $b_n = \log_2 a_n$, 所以 $b_n = n + 2$,7 分

记 $c_n = \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}$, 则 $c_n = \frac{1}{(n+3) \cdot (n+2)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$,9 分

所以 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$

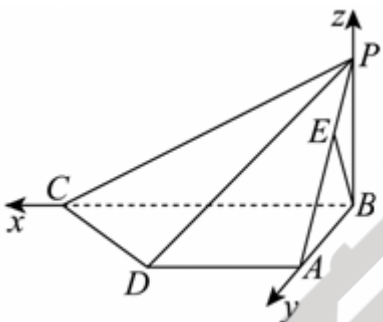
即 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = \frac{n}{3n+9}$ 12 分

综上所述 $T_n = \frac{n}{3n+9} (n \in \mathbb{N}^*)$ 13 分

16. (1) 证明: 因为 $PB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp PB$,
由 $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, 可得 $AB \perp AD$,
因为 $AB \cap PB = B$, 所以 $AD \perp$ 平面 PAB 2 分
因为 $BE \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp BE$,3 分
因为 $PB = AB$, E 为 PA 的中点, 所以 $BE \perp PA$,4 分
又因为 AD 、 $PA \subset$ 平面 PAD , $AD \cap PA = A$, 所以 $BE \perp$ 平面 PAD
又因为 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BE \perp PD$6 分

(2) 如图, 分别以 BC 、 BA 、 BP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $B(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$, $C(4, 0, 0)$, $D(2, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$,7 分



所以 $\overrightarrow{AP} = (0, -2, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{CP} = (-4, 0, 2)$,
设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 因为 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$
所以 $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -4x + 2z = 0 \end{cases}$, 取 $\vec{n} = (1, 1, 2)$ 9 分
令 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AP} (0 \leq m \leq 1)$, 则 $E(0, 2-2m, 2m)$, $\overrightarrow{BE} = (0, 2-2m, 2m)$
设直线 BE 与平面 PCD 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BE} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BE}|}$,10 分
所以 $\frac{|2-2m+4m|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(2-2m)^2 + 4m^2}} = \frac{7\sqrt{60}}{60}$, 整理得 $88m^2 - 118m + 39 = 0$,13 分
解得 $m = \frac{3}{4}$ 或 $m = \frac{13}{22}$, 可得 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$ 或 $\overrightarrow{AE} = \frac{13}{22}\overrightarrow{AP}$, 所以 $\frac{AE}{PE} = 3$ 或 $\frac{AE}{PE} = \frac{13}{9}$15 分

17. (1) 因为两次抽奖相互独立, 记 “第 2 次抽到一等奖” 为事件 B , 则 $P(B) = \frac{1}{5}$ 4 分

(2) 由题意知 Y 的取值可能为 0, 1, 2, 3, 4,
 $P(Y=4) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{25}$ 6 分
 $P(Y=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{4}{25}$ 8 分
 $P(Y=2) = \frac{3}{25} \times 2 = \frac{6}{25}$ 10 分
 $P(Y=1) = \frac{4}{25} \times 2 = \frac{8}{25}$ 12 分
 $P(Y=0) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ 14 分

所以 Y 的分布列为

Y	4	3	2	1	0
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{5}$

所以 Y 的数学期望为 $E(Y) = 4 \times \frac{2}{25} + 3 \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 0 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$ 17 分

18. (1) 由两圆的方程知：圆心分别为 $C_1(-2,0)$ ， $C_2(2,0)$ ，即 $F_1(-2,0)$ ， $F_2(2,0)$ ，

$\therefore b^2 + 4 = 16$ ，解得： $b^2 = 12$ ，3 分

$\therefore C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 (y \leq 0)$ 4 分

(2) 由已知 $|CD| \leq |CF_1| + |DF_1| = |CF_1| + 2$ ，当且仅当 C、D、 F_1 三点共线时， $|CD|$ 的长度取得最大值为 $|CF_1| + 2$ 7 分

当点 C 与 A_2 重合时， $|CF_1|$ 的最大值为 $c + a = 2 + 4 = 6$ 9 分

所以 $|CD|$ 的最大值为 $2 + c + a = 2 + 2 + 4 = 8$ 10 分

(3) 由已知： $|MN| + |PQ| = |MF_1| + |PF_2| + 4$ 11 分

因为 $l_1 // l_2$ ，所以由对称性可知： $|MF_1| + |PF_2|$ 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 截直

线 l_2 所得弦长，12 分

设 $l_2: x = my + 2$ ，

设 l_2 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 交于点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，

由 $\begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$ 得： $(3m^2 + 4)y^2 + 12my - 36 = 0$ ，则 $\Delta = 576(m^2 + 1) > 0$ ，

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{12m}{3m^2 + 4}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{36}{3m^2 + 4}$ ，14 分

所以 $|MF_1| + |PF_2| = \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{24(m^2 + 1)}{3m^2 + 4} = 8 - \frac{8}{3m^2 + 4}$ 16 分

当 $m = 0$ 时， $|MF_1| + |PF_2|$ 取得最小值 $8 - 2 = 6$ ，

所以 $|MN| + |PQ|$ 的最小值为 $6 + 4 = 10$ 17 分

19. (1) 当 $a = 1$ 时， $f(x) = e^x - x^2$ ，定义域为 R ，

求导得： $f'(x) = e^x - 2x$ ， $f''(x) = e^x - 2$ ，1 分

当 $x \in (-\infty, \ln 2)$ 时， $f''(x) < 0$ ， $f'(x)$ 单调递减

当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时， $f''(x) > 0$ ， $f'(x)$ 单调递增

所以 $f'(x) \geq f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$ 3 分

所以函数 $f(x) = e^x - x^2$ 在 R 上单调递增4 分

(2) 由题意知方程 $e^x - ax^2 = 0$ 有两个不同的正实根 x_1, x_2 ，

即方程 $\frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{a}$ 有两个不同的实数解，数形结合得到 $a > \frac{e^2}{4}$

因为 $e^{x_1} = ax_1^2$ ， $e^{x_2} = ax_2^2$ ，

两边同时取自然对数，得 $x_1 = \ln a + 2\ln x_1$ ， $x_2 = \ln a + 2\ln x_2$ ，5 分

两式相减得 $x_2 - x_1 = 2(\ln x_2 - \ln x_1)$ ，即 $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 2$ ，6 分

(i) 要证 $x_1 + x_2 > 4$ ，只需证明 $\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，

令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$ ，只需证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 8 分

构造函数 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$ ，求导得 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ ，

所以函数 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，于是 $g(t) > g(1) = 0$ ，

所以不等式 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，

综上：不等式 $x_1 + x_2 > 4$ 成立10 分

(ii) 结合 (i) 知当 $x \in (0, x_1)$ 时， $f(x) > 0$ ；

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ 12 分

所以要满足 $(3e^{2x} - be^x + c) \cdot f(x) \geq 0$ 恒成立，

则关于 x 的方程 $3e^{2x} - be^x + c = 0$ 的两根也是 x_1, x_2 ，

所以 $3e^{2x} - be^x + c = 3(e^x - e^{x_1})(e^x - e^{x_2})$ ，14 分

所以 $b = 3(e^{x_1} + e^{x_2}) = 3(ax_1^2 + ax_2^2) = 3a(x_1^2 + x_2^2) > 3a \cdot \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} > 24a$ ，

所以 $b > 24a$ 成立17 分

