达州市普通高中 2026 届第一次诊断性测试

数学试题参考答案

1. C　2. B　3. A　4. D　5. D　6. C　7. B　8. B

9. ABD　10. AC　11. ABD

12. -40　13. $2\sqrt{2}$　14. $(0,\ \sqrt{2}-1]$

15. 解：（1）设数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差d，根据题意得

$\begin{cases}a_1+d=5\\5a_1+10d=40\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=3\end{cases}$，　$\therefore S_n=\dfrac{3n^2+n}{2}$.

（2）$\because S_n=\dfrac{3n^2+n}{2}$，$\therefore b_n=\dfrac{2}{3n^2+3n}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$.

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{n+1})$，

$\therefore T_n<\dfrac{2}{3}$，

$\because T_n<m$，$\therefore m\geqslant\dfrac{2}{3}$.

16. 解：（1）$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=4.5$，

$\bar{y}=\dfrac{3+4+8+9+12+12+15+17}{8}=10$，

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{444-8\times4.5\times10}{204-8\times4.5^2}=2，$$

$\hat{a}=\bar{y}-b\bar{x}=10-2\times4.5=1$，

∴月份x与销售额y的经验回归方程：$\hat{y}=2x+1$.

（2）根据（1）的方程和表中数据计算可得残差为负的月份有 2 月和 6 月.

设从这 8 个月中随机抽取 2 个月，仅抽到 1 个月的数据残差为负为事件A，抽到 2 个月的数据残差都为负为事件B，则抽到 2 个月的数据含有残差为负为事件$A+B$.

$P(A)=\dfrac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$，

$P(B)=\dfrac{C_2^2}{C_8^2}=\dfrac{1}{28}$，

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{7}+\frac{1}{28}=\frac{13}{28}$.

17. 解：（1）$\because y=\frac{x^2}{2p}$，$\therefore y'=\frac{x}{p}$，$y'|_{x=m}=\frac{m}{p}$，

$\therefore \frac{2}{p}=1$，$p=2$，

$\therefore$抛物线C的方程为：$x^2=4y$.

（2）由（1）知$F(0,1)$，直线l的斜率为$\frac{m}{2}$，

$\therefore$平行于l且过F的直线方程为：$y=\frac{m}{2}x+1$，设$B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x^2=4y\\ y=\frac{m}{2}x+1\end{cases}$，$x^2-2mx-4=0$，$\Delta=4m^2+16>0$，$x_1+x_2=2m$，

$\because A'(-m,\frac{m^2}{4})$，$\therefore A'B$斜率为$k_{A'B}=\frac{y_1-\frac{m^2}{4}}{x_1+m}=\frac{x_1-m}{4}$，

$A'D$斜率为$k_{A'D}=\frac{y_2-\frac{m^2}{4}}{x_2+m}=\frac{x_2-m}{4}$，

$\therefore k_{A'B}+k_{A'D}=\frac{x_1+x_2-2m}{4}=\frac{2m-2m}{4}=0$，

$A'B$与$A'D$的斜率和是定值0.

18. 解：（1）$\because O$为圆心，C为半圆弧$\overset{\frown}{AB}$中点，$\therefore AO\perp OC$，

$\because O$为圆心，直径$AB=2$，$\therefore AO=OB'=1$，又$\because AB'=\sqrt{2}$，

$\therefore AO^2+OB'^2=AB'^2$，$AO\perp OB'$.

$\because OB'\subset$平面OCB'，$OC\subset$平面OCB'，$OC\cap OB'=O$，

$\therefore AO\perp$平面OCB'.

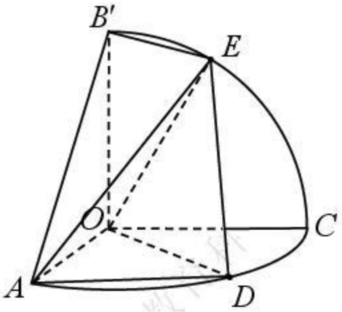
又$\because B'E\subset$平面OCB'，$\therefore AO\perp B'E$.

（2）情况一、

如图连接AE，则多面体$OADEB'$的体积等于三棱锥$E-AOB'$的体积和三棱锥$E-OAD$的体积之和.

$\therefore V_{E-AOB'}=V_{A-B'OE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{12}$.

由（1）易得平面$OAC\perp$平面$OB'C$，



$\therefore$ 点 E 到平面 OAD 的距离为 $OE\sin\angle EOC=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

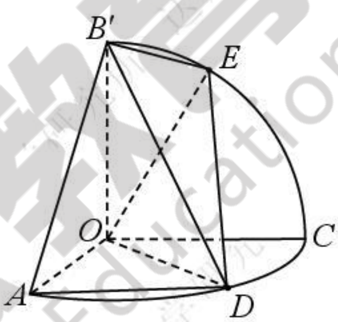
$\therefore V_{E-OAD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$.

$\therefore$ 多面体 $OADEB'$ 的体积为 $\frac{5}{24}$.

情况二、如图连接 DB'，则多面体 $OADEB'$ 的体积等于三棱锥 $O-ADB'$ 的体积和三棱锥 $D-OEB'$ 的体积之和.

$\because OB'\perp OA$，$OB'\perp OC$，$OA\subset$ 平面 OAD，$OC\subset$ 平面 OAD，$OA\cap OC=O$，

$\therefore OB'\perp$ 平面 OAD.



$\therefore V_{B'-OAD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

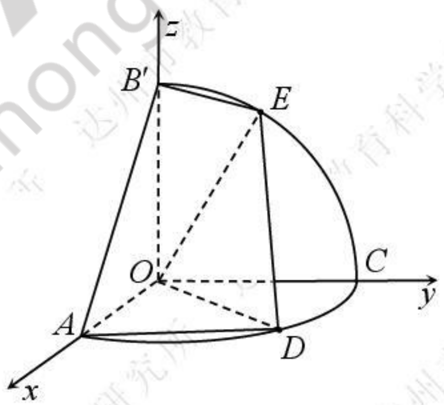
由（1）易得平面 $OAC\perp$ 平面 $OB'C$，

$\therefore$ 点 D 到平面 $OB'C$ 的距离为 $OD\sin\angle DOC=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}$，$\therefore \angle AOD=\angle COE=\frac{\pi}{3}$，$\angle EOB'=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore V_{D-OB'E}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.

$\therefore$ 多面体 $OADEB'$ 的体积为 $\frac{1+2\sqrt{3}}{24}$.



说明：情况一、情况二答对一种即可

（3）$\because OA\perp OC$，$OB'\perp OC$，$OA\perp OB'$，

$\therefore$ 建立如图空间直角坐标系，

设 $\angle AOD=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

$\therefore D(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$E(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ ，

设平面 ODE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$，设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0\end{cases}$，$\begin{cases}x\cos\theta+y\sin\theta=0\\ y\cos\theta+z\sin\theta=0\end{cases}$，设 $y=1$，解得 $x=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$z=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

即 $\boldsymbol{n}=(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 1,\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta})$，平面 AOB' 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,\ 1,\ 0)$.

设平面 OAB' 与平面 ODE 所成角为 α，则

$$\cos\alpha=|\cos<\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}>|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\times1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

当 $\sin\theta=\cos\theta$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时取等号，

$\therefore$ 平面 OAB' 与平面 ODE 所成角余弦的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 解：(1) $\varphi(x)=xf(x)=ax^2+(a+1)x-1$，

$\therefore$ 二次函数对称轴为：$x=-\dfrac{a+1}{2a}=-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a})$，

$\because a>\dfrac{1}{e}$，$\therefore 0<\dfrac{1}{a}<e$，$\therefore 0<\dfrac{1}{2a}<\dfrac{e}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a}<\dfrac{e+1}{2}$，

$\therefore 0>-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a})>-\dfrac{e+1}{2}>-(e+1)$.

$\therefore$ 单调递增区间为 $[-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a}),\ 0]$，$L_1=0-[-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a})]=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a}$，

$\therefore$ 单调递减区间为 $[-(e+1),\ -(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a})]$，$L_2=-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a})-[-(e+1)]=e+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a}$，

$\therefore L_1-L_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2a}-(e+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a})=\dfrac{1}{a}-e<0$，

$\therefore L_1<L_2$.

(2) 要证 $f(x)>g(x)$，即证 $ax+(a+1)-\dfrac{1}{x}>(a+1)\ln x$，

即证 $ax+(a+1)-\dfrac{1}{x}-(a+1)\ln x>0$，

记 $h(x)=ax+(a+1)-\dfrac{1}{x}-(a+1)\ln x$，

$h'(x)=a+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x^2}=\dfrac{a(x-\frac{1}{a})(x-1)}{x^2}$，

$\because a>\dfrac{1}{e}$，$\dfrac{1}{a}<e$，$x\in[\dfrac{1}{e},\ e]$，

$\therefore$ ①当 $\dfrac{1}{a}\leqslant\dfrac{1}{e}$，即 $a\geqslant e$ 时，$h(x)$ 在 $x\in[\dfrac{1}{e},\ 1]$ 单调递减，$x\in[1,\ e]$ 单调递增，

$h(x)_{\min}=h(1)=2a>0$，$f(x)>g(x)$ 成立，

②当 $\frac{1}{e}<\frac{1}{a}<1$，即 $1<a<e$ 时，$h(x)$ 在 $x\in[\frac{1}{e},\ \frac{1}{a}]$ 单调递增，$x\in[\frac{1}{a},\ 1]$ 单调递减，

$x\in[1,e]$ 单调递增，

$\begin{cases}h(\frac{1}{e})=\frac{a}{e}+a+1-e+a+1=2(a+1)+\frac{a}{e}-e\\h(1)=2a\end{cases}$，$\because 1<a<e$，$\therefore h(\frac{1}{e})>0$ 且 $h(1)>0$，

$\therefore f(x)>g(x)$ 成立.

③ $\frac{1}{a}=1$ 时，即 $a=1$ 时，$h(x)$ 在 $x\in[\frac{1}{e},\ e]$ 单调递增，

$h(x)_{\min}=h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}+1+1-e+(1+1)>0$ $\therefore f(x)>g(x)$ 成立.

④ $1<\frac{1}{a}<e$ 时，即 $\frac{1}{e}<a<1$ 时，$h(x)$ 在 $x\in[\frac{1}{e},\ 1]$ 单调递增，$x\in[1,\ \frac{1}{a}]$ 单调递减，$x\in[\frac{1}{a},\ e]$ 单调递增，

$\therefore \begin{cases}h(\frac{1}{e})=2(a+1)+\frac{a}{e}-e>2+\frac{2}{e}+\frac{1}{e^2}-e>0\\h(\frac{1}{a})=2+(a+1)\ln a>2-(a+1)>0\end{cases}$ $\therefore f(x)>g(x)$ 成立.

综上，$f(x)>g(x)$ 成立.

（3）由（2）记 $h(x)=ax+(a+1)-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x$，

$h'(x)=\frac{a(x-\frac{1}{a})(x-1)}{x^2}$　$\because h(1)=a\cdot 1+(a+1)-1-0=2a>0$，

（2）中③知 $a=1$ 时，$h(x)$ 在 $x\in(0,\ +\infty)$ 单调递增且存在 $h(1)>0$

由（2）中④知，$\frac{1}{e}<a<1$ 时 $h(\frac{1}{a})>0$，

$a>1$ 时，$h(x)$ 在 $x\in(0,\ \frac{1}{a}]$ 单调递增，$x\in\left[\frac{1}{a},1\right]$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 单调递增且 $h(1)>0$，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时有 $h(\frac{1}{a})>0$，

$\therefore$ 即 $a>\frac{1}{e}$ 且 $a\neq 1$ 时，始终有两极值 $h(\frac{1}{a})>0$，$h(1)>0$.

$\because h(\frac{1}{e^5a^2})=\frac{1}{e^5a}+(a+1)-e^5a^2+(a+1)(\ln e^5+\ln a^2)=\frac{1}{e^5a}-e^5a^2+(a+1)(6+2\ln a)$

记 $m(a)=\ln a-a+1$ $\therefore m'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$ $\therefore m(a)_{\min}=m(1)=0$ $\therefore \ln a\leqslant a-1$

$\therefore 6+2\ln a\leqslant 6+2(a-1)=2a+4$.

$\therefore \frac{1}{e^5a}-e^5a^2+(a+1)(6+2\ln a)\leqslant\frac{1}{e^5a}-e^5a^2+(a+1)(2a+4)<(2-e^5)a^2+6a+4+\frac{1}{e^4}$.

令 $m(a)=(2-e^5)a^2+6a+4+\frac{1}{e^4}$，$\because$ 对称轴 $x=-\frac{6}{2(2-e^5)}=\frac{3}{e^5-2}<\frac{1}{e}$

$\therefore m(a)$ 在 $a\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 上为单调递减，

$\therefore m(a)<m(\frac{1}{e})=(2-e^5)\frac{1}{e^2}+\frac{6}{e}+4+\frac{1}{e^4}=-e^3+\frac{2}{e^2}+\frac{6}{e}+\frac{1}{e^4}+4<0$

$\therefore h(\frac{1}{e^5a^2})<0$.

$\therefore k(x)=0$ 只有一解，$\therefore$ 方程 $f(x)=g(x)$ 有一个根.

综上，方程 $f(x)=g(x)$ 有一个根