

成都市 2023 级高中毕业班第一次诊断性检测

数 学

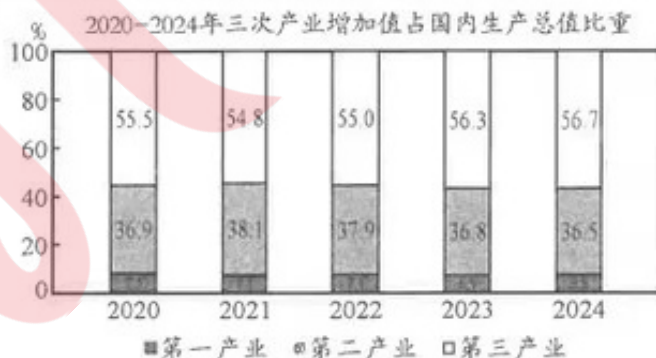
本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x | x < 10\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{3, 6, 9\}$ B. $\{0, 3, 6, 9\}$ C. $\{1, 3, 6\}$ D. $\{1, 3, 9\}$
2. 在复平面内,复数 $z = \frac{1}{1+i}$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 三次产业增加值占国内生产总值的比重是衡量一个国家或地区经济发展阶段、产业结构优化程度以及未来经济发展潜力的重要指标,其中第一产业包括农业、林业、渔业等;第二产业涵盖制造业、建筑业等;第三产业则包括服务业、金融业、信息技术等. 如图为我国 2020—2024 年三次产业增加值占国内生产总值比重的等高堆积条形图,则



- A. 2020—2024 年第一产业增加值占国内生产总值比重逐年递增
- B. 2020—2024 年第二产业增加值占国内生产总值比重的中位数为 36.9%
- C. 2020—2024 年第三产业增加值占国内生产总值比重的平均数为 55.1%
- D. 2020—2024 年三次产业中增加值占国内生产总值比重极差最大的是第二产业

4. 已知 a, b 为非零向量, 则“存在实数 λ , 使 $a = \lambda b$ ”是“ $|a+b| = |a| + |b|$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 某种产品的加工需要经过 5 道不同工序, 如果其中某 2 道工序必须相邻, 那么加工顺序共有
- A. 96 种 B. 72 种 C. 48 种 D. 36 种
6. 在空间中, 下列命题正确的是
- A. 垂直于同一直线的两条直线平行
- B. 平行于同一直线的两个平面平行
- C. 若一个平面经过另一个平面的一条垂线, 则这两个平面互相垂直
- D. 若一个平面内有三个不共线的点到另一个平面的距离相等, 则这两个平面平行
7. 不等式 $4^x + |1 - 2^x| > 11$ 的解集为
- A. $\{x | x < \log_2 3\}$ B. $\{x | x > \log_2 3\}$ C. $\{x | x < \log_2 5\}$ D. $\{x | x > \log_2 5\}$
8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 3$, 则 $a_1 =$
- A. $-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{8}{5}$ B. $-\frac{1}{4}$ 或 $\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{8}{5}$ D. $\frac{1}{5}$ 或 $-\frac{8}{5}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$, 则
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$
- C. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
- D. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后可以得到函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x-1)\ln x$, 则
- A. $f(1) = 0$
- B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (x+1)\ln(-x)$
- C. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- D. 存在实数 k , 使得直线 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 的图象恰有 1 个公共点
11. 已知 x, y 为正数, 且 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + xy, \\ x^2 + 4 \geq y^2, \\ y^2 + 4 \geq x^2, \end{cases}$ 则
- A. xy 的最大值为 4
- B. $x+y$ 的最大值为 4
- C. xy 的最小值为 $\frac{8}{3}$
- D. $x+y$ 的最小值为 $2+\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2=3, a_4=7$ ，则 $S_5=$ _____.

13. 已知直线 $2x-y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于 A, B 两点，则线段 AB 中点的坐标为_____.

14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ，侧面 $PAB \perp$ 侧面 PBC ，且 $PA=2$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 4. 若三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上，则球 O 表面积的最小值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，且 $|A_1A_2|=4$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 若直线 $l: x-2y-1=0$ 与 E 相交于 P, Q 两点，求 $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1Q}$ 的值.

16. (本小题满分 15 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ ， $\sin B + \cos 2C = 0$.

(1) 求 A, B ；

(2) 若 $BC=2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. (本小题满分 15 分)

口袋中里有 2 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外完全相同. 现有两种游戏方案：

游戏一：从袋中有放回地摸球 2 次，记摸到白球的次数为 X ；

游戏二：从袋中无放回地摸球 2 次，记摸到白球的次数为 Y . 两种游戏的结果相互独立.

(1) 分别求两种游戏中第二次摸到白球的概率；

(2) 求 $P(X=Y)$ ；

(3) 对于随机变量 $\xi (\xi=0, 1, 2, \dots, n)$ ，定义信息熵 $H(\xi) = -\sum_{i=0}^n P(\xi=i) \log_2 P(\xi=i)$ ，它量化了一个随机系统所包含的“不确定性”程度，熵值越大，表明该系统的“不确定性”越高，比较 $H(X)$ 与 $H(Y)$ 的大小，并判断哪种游戏的“不确定性”更高.

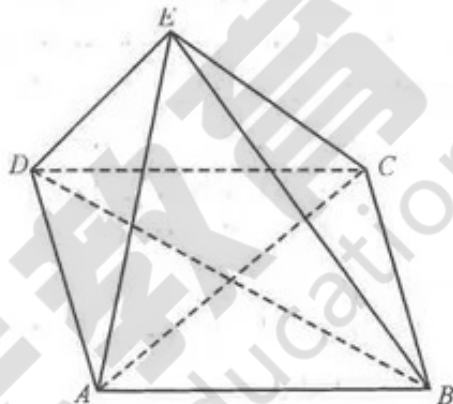
18. (本小题满分 17 分)

如图,在菱形 $ABCD$ 中,将三角形 ACD 沿 AC 翻折至三角形 ACE ,连接 BE, DE 构成四棱锥 $E-ABCD$.

(1)证明: $AD \parallel$ 平面 BCE ;

(2)证明:平面 $ACE \perp$ 平面 BDE ;

(3)若 $AB \perp AE, AB = \sqrt{2}$,四棱锥 $E-ABCD$ 的体积不大于 $\frac{1}{3}$,求平面 ACE 与平面 ADE 夹角的余弦值的最大值.



19. (本小题满分 17 分)

设函数 $f_n(x) = -1 + C_n^1 x + C_n^2 \frac{x^2}{2^2} + C_n^3 \frac{x^3}{3^2} + \cdots + C_n^n \frac{x^n}{n^2} (x \in \mathbf{R}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)证明:对每个 $n \in \mathbf{N}^*$,存在唯一的 $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$,满足 $f_n(x_n) = 0$;

(2)若 $f_2(x) + 1 \geq a \ln(x+1)$,求 a ;

(3)证明: $f_n'(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$,其中 $f_n'(x)$ 表示 $f_n(x)$ 的导数.