

## 成都市 2023 级高中毕业班第一次诊断性检测

## 数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. A; 2. D; 3. B; 4. B; 5. C; 6. C; 7. B; 8. A.

二、选择题:(每小题 6 分,共 18 分)

9. ABD; 10. AC; 11. ABC.

三、填空题:(每小题 5 分,共 15 分)

12. 25; 13.  $(-2, 1)$ ; 14.  $20\pi$ .

四、解答题:(共 77 分)

15. 解:(1)由  $|A_1A_2|=2a=4$ ,得  $a=2$ . .....3 分又离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,则  $c=\sqrt{3}$ ,  $b^2=a^2-c^2=1$ .所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ . .....6 分(2)设  $P, Q$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ,由  $\begin{cases} 2y=x-1, \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$  消去  $y$ ,得  $2x^2-2x-3=0$ . .....8 分 $\Delta=4+24=28>0$ ,所以  $x_1+x_2=1, x_1x_2=-\frac{3}{2}$ . .....9 分所以  $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1Q} = (x_1+2)(x_2+2) + y_1y_2 = (x_1+2)(x_2+2) + \frac{x_1-1}{2} \cdot \frac{x_2-1}{2}$  .....11 分

$$= \frac{5}{4}x_1x_2 + \frac{7}{4}(x_1+x_2) + 4 + \frac{1}{4} = \frac{33}{8}.$$

所以  $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1Q}$  的值为  $\frac{33}{8}$ . .....13 分16. 解:(1)由  $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ ,得  $\sqrt{2}\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ,即  $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ . .....1 分因为  $A \in (0, \pi)$ ,所以  $A + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ .所以  $A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .所以  $A = \frac{\pi}{4}$ . .....3 分由  $\sin B + \cos 2C = 0$ ,且  $2C = 2(\pi - A - B) = \frac{3\pi}{2} - 2B$ ,

$$\text{得 } \sin B + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2B\right) = 0. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \sin B - \sin 2B = 0, \text{ 即 } \sin B(1 - 2\cos B) = 0. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \sin B > 0, \text{ 则 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } C = \frac{5\pi}{12}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,

$$\text{因为 } a = 2, \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{3} + 1. \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. 解: (1) 对于游戏一, 设  $A$  = “第二次摸到白球”,

$$\text{则 } P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

对于游戏二, 设  $A_1$  = “第一次摸到白球”,  $A_2$  = “第二次摸到白球”,

$$\text{则 } P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 对于游戏一,  $X$  的可能取值为 0, 1, 2,  $X$  的分布列为:

$$P(X=0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

对于游戏二,  $Y$  的可能取值为 0, 1, 2,  $Y$  的分布列为:

$$P(Y=0) = \frac{C_2^0 C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(Y=1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}, P(Y=2) = \frac{C_2^2 C_2^0}{C_4^2} = \frac{1}{6}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为游戏一与游戏二的结果相互独立,

$$\text{所以 } P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2)$$

$$= P(X=0)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } H(X) = -\sum_{i=0}^2 P(X=i) \log_2 P(X=i)$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = -\left[\frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2)\right] = \frac{3}{2};$$

$\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\begin{aligned} \text{同理 } H(Y) &= -\sum_{i=0}^2 P(Y=i) \log_2 P(Y=i) = -\left(\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6}\right) \\ &= -\left[\frac{1}{6} \times (-\log_2 3 - 1) + \frac{2}{3} \times (1 - \log_2 3) + \frac{1}{6} \times (-\log_2 3 - 1)\right] = \log_2 3 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

.....12 分

$$\begin{aligned} \text{因为 } H(X) - H(Y) &= \frac{3}{2} - \log_2 3 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - \log_2 3 = \frac{1}{6} (\log_2 2^{11} - \log_2 3^6) \\ &= \frac{1}{6} \log_2 \frac{2^{11}}{3^6} > 0, \end{aligned}$$

所以  $H(X) > H(Y)$ , 故游戏一的“不确定性”更高.

.....15 分

18. 解: (1) 因为四边形  $ABCD$  是菱形, 所以  $AD \parallel BC$ .

.....2 分

因为  $BC \subset$  平面  $BCE$ ,  $AD \not\subset$  平面  $BCE$ ,

所以  $AD \parallel$  平面  $BCE$ .

.....3 分

(2) 设  $BD$  交  $AC$  于点  $O$ , 连接  $EO$ ,

因为  $EC = EA$ ,  $BA = BC$ ,  $O$  是  $AC$  中点, 所以  $AC \perp EO$ ,  $AC \perp BO$ .

.....5 分

因为  $EO \cap BO = O$ ,  $EO \subset$  平面  $BDE$ ,  $BO \subset$  平面  $BDE$ , 所以  $AC \perp$  平面  $BDE$ .

.....7 分

因为  $AC \subset$  平面  $ACE$ , 所以平面  $ACE \perp$  平面  $BDE$ .

.....8 分

(3) 取  $EB$  中点  $M$ , 连接  $AM$ ,  $CM$ , 易得

$\triangle AEB \cong \triangle CEB$ .

设  $\angle AMC = \theta$ ,  $\angle EOB = \alpha$ ,

因为  $EA = AB = \sqrt{2}$ , 且  $EA \perp AB$ , 所以

$EB = 2$ ,  $AM = 1$ .

因为  $AM \perp BE$ ,  $CM \perp BE$ ,  $AM \cap CM = M$ ,

所以  $BE \perp$  平面  $ACM$ .

故  $V_{E-ABCD} = 2V_{E-ABC}$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times BE \times S_{\triangle ACM} = \frac{2}{3} \sin \theta \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \sin \theta \leq \frac{1}{2}.$$

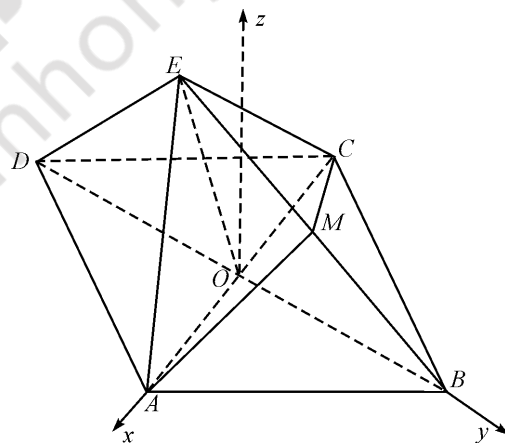
.....9 分

作  $Oz \perp$  平面  $ABCD$ , 以  $O$  为原点,  $OA, OB, Oz$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴建立如图所示

的空间直角坐标系, 设  $OA = a$ ,  $OB = OE = b$ , 则  $A(a, 0, 0)$ ,  $C(-a, 0, 0)$ ,  $D(0, -b, 0)$ ,

$E(0, b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ ,

.....10 分



$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} = (-2a, 0, 0), \overrightarrow{CE} = (a, b \cos \alpha, b \sin \alpha),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-a, -b, 0), \overrightarrow{DE} = (0, b + b \cos \alpha, b \sin \alpha).$$

$$\text{设平面 } ACE \text{ 的法向量 } \mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = -2ax_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CE} = ax_1 + by_1 \cos \alpha + bz_1 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\text{取 } z_1 = -\cos \alpha, \text{ 可得平面 } ACE \text{ 的一个法向量 } \mathbf{n}_1 = (0, \sin \alpha, -\cos \alpha). \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{设平面 } ADE \text{ 的法向量 } \mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = -ax_2 - by_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = by_2(1 + \cos \alpha) + bz_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\text{取 } z_2 = 1, \text{ 可得平面 } ADE \text{ 的一个法向量 } \mathbf{n}_2 = \left( \frac{b \sin \alpha}{a(1 + \cos \alpha)}, -\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, 1 \right). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

设平面  $ACE$  与平面  $ADE$  夹角为  $\beta$ ,

$$\text{在三角形 } AMC \text{ 中, } a = \sin \frac{\theta}{2}, \text{ 且由 } a^2 + b^2 = 2, \text{ 则 } b^2 = 2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{在三角形 } EOB \text{ 中, 由余弦定理可得 } 2b^2 \cos \alpha = 2b^2 - 4, \text{ 则 } \cos \alpha = \frac{-\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$$\text{因为 } \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha = -1, \text{ 且 } |\mathbf{n}_1| = 1,$$

$$|\mathbf{n}_2|^2 = 1 + \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} = 1 + \left( 1 + \frac{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{2}{2 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{8}{\sin^2 \theta} \geq 33. \quad \dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \beta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{n}_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{33}.$$

$$\text{综上, 平面 } ACE \text{ 与平面 } ADE \text{ 夹角的余弦值的最大值为 } \frac{\sqrt{33}}{33}. \quad \dots\dots 17 \text{ 分}$$

$$19. \text{ 解: (1) 由题意可得 } f'_n(x) = C_n^1 + C_n^2 \frac{x}{2} + C_n^3 \frac{x^2}{3} + \dots + C_n^n \frac{x^{n-1}}{n}. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } f'_n(x) > 0, \text{ 故 } f_n(x) \text{ 在 } [0, \frac{1}{2}] \text{ 单调递增.}$$

$$\text{因为 } f_n(0) = -1 < 0, \text{ 且 } f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{C_n^1}{2} + \dots + C_n^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} > -1 + \frac{C_n^1}{2} \geq -1 + \frac{2}{2} = 0,$$

所以对每个  $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ , 存在唯一的  $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 满足  $f_n(x_n) = 0$ . .....4 分

(2) 由题意可得当  $x > -1, 2x + \frac{x^2}{4} \geq a \ln(x+1)$  恒成立,

$$\text{设 } g(x) = \frac{x^2}{4} + 2x - a \ln(x+1),$$

当  $a \leq 0$  时, 由  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16} + a \ln 2 < 0$ , 不合题意; .....5 分

当  $a > 0$  时,  $g'(x) = \frac{x}{2} + 2 - \frac{a}{x+1}$ , 则  $g'(x)$  在  $(-1, +\infty)$  单调递增.

且  $x \rightarrow -1, g'(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty, g'(x) \rightarrow +\infty$ .

①  $0 < a < 2$  时, 由  $g'(0) = 2 - a > 0$ , 故存在  $x_0 \in (-1, 0)$ , 使  $g'(x_0) = 0$ , 所以  $g(x)$  在  $[x_0, 0)$  单调递增. 所以  $g(x_0) < g(0) = 0$ , 矛盾; .....7 分

②  $a > 2$  时, 由  $g'(0) = 2 - a < 0$ , 故存在  $x_0 \in (0, +\infty)$ , 使  $g'(x_0) = 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, x_0]$  单调递减. 所以  $g(x_0) < g(0) = 0$ , 矛盾; .....9 分

③  $a = 2$  时, 由  $g'(0) = 2 - a = 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(-1, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增.

所以  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 不等式成立, 满足题意;

综上所述,  $a = 2$ . .....10 分

$$(3) \text{ 由题意可得 } f'_n(x) = C_n^1 + C_n^2 \frac{x}{2} + C_n^3 \frac{x^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{x^{n-1}}{n},$$

$$\text{则 } f'_n(-1) = C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\text{要证 } f'_n(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\text{只需证明: } C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{设 } a_n = C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) \frac{(-1)^{k-1}}{k} + C_{n+1}^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \end{aligned}$$

$$\text{由此可得 } a_{n+1} = a_n + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{①}. \quad \text{.....13 分}$$

$$\text{由 } \frac{C_n^{k-1}}{k} = \frac{n!}{k \cdot (k-1)! (n+1-k)!} = \frac{C_{n+1}^k}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (-1)^{k-1}}{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[ \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k - C_{n+1}^0 (-1)^0 \right] = \frac{-1}{n+1} [(1-1)^{n+1} - 1] = \frac{1}{n+1}. \quad \dots\dots 16 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{由①式可得 } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}, a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}, \dots\dots, a_3 - a_2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{则累加可得 } a_n = a_2 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ 并且 } a_2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{综上可知, } f'_n(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ 成立.} \quad \dots\dots 17 \text{ 分}$$