

机密★启用前 [考试时间:2025 年 12 月 28 日下午 15:00—17:00]

乐山市高中 2023 级第一次调查研究考试

数 学

(本试卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $U = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) =$
A. $\{7, 8\}$ B. $\{0, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ D. $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2. 已知复数 z 满足 $(1 + 2i)\bar{z} = 4 + 3i$, 则 $|z| =$
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. 5
3. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 使 $a > b$ 成立的一个充分不必要条件是
A. $a + c > b + c$ B. $a^2 > b^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\lg a > \lg b$
4. 已知两条平行直线 $l_1: 2x - y - 1 = 0$, $l_2: 6x - 3y - 2 = 0$, 则 l_1 与 l_2 间的距离为
A. $\frac{\sqrt{5}}{45}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{15}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
5. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x$, 若 $f(a) > 5$, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 1)$ D. $(-5, 5)$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于原点对称.

若 $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\beta$ 的值为

- A. $\frac{24}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $-\frac{7}{25}$

7. 已知点 $P(-2, -3)$, 圆 $Q: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$, 以 PQ 为直径的圆与圆 Q 相交于 A, B 两点, 则直线 PA 与圆 Q 的位置关系为

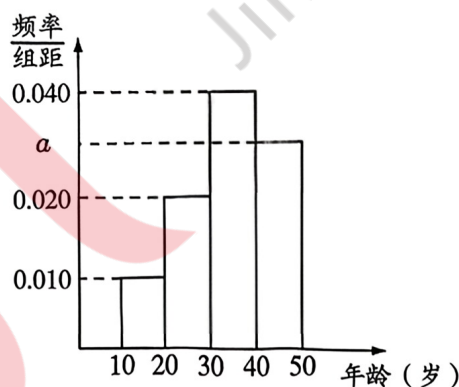
- A. 相交 B. 相离 C. 相切 D. 不确定

8. 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax + b$ 的最小值为 0, 则

- A. $a > b$ B. $a \geq b$ C. $a < b$ D. $a \leq b$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 2025 年 9 月 20 日, 四川省城市足球联赛(简称“川超”)开幕式暨揭幕战观众达 21448 人。为了了解各年龄层对“川超”的关注程度, 随机选取了 200 名年龄在 $[10, 50]$ 的观众进行调查, 并绘制如下的频率分布直方图, 则



- A. $a = 0.03$
 B. 该场观众年龄众数的估计值为 40
 C. 该场观众年龄 50% 分位数的估计值为 35
 D. 该场观众年龄平均数的估计值为 35

10. 已知函数 $f(x) = 2^x + x$, $g(x) = \log_2 x + x$ 的零点分别为 a, b , 则下列说法正确的是

- A. $a - b < 0$ B. $f(\log_2 x) = g(x)$
 C. $f(a) < f(2a)$ D. $a + b = 0$

11. 已知曲线 $\Gamma: \frac{y|y|}{4} - x|x| = 1$, $A(0, 2)$, $B(0, -2)$, $C(-\frac{3}{2}, 1)$, $D(-\frac{1}{2}, 3)$, $P(x, y)$ 为曲线

Γ 上不同于 A 的任意一点, 则

A. $y = 2x$ 是曲线 Γ 的一条渐近线

B. 直线 PA 与直线 PB 斜率之积为 $\frac{1}{4}$

C. y 是关于 x 的单调递增函数

D. $\triangle PCD$ 面积的取值范围是 $[2 - \sqrt{2}, 2)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知向量 a, b 满足 $a + b = (1, 2)$, $a - b = (3, 1)$, 则 $|a|^2 - |b|^2 =$ _____.

13. 一个圆锥的底面直径为 4, 高为 $2\sqrt{3}$, 过圆锥高的中点作平行于底面的截面, 该截面截去了一个圆锥, 则剩下几何体的表面积为 _____.

14. 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 M, N 两点 (M 点在 N 点的左侧), 点 $A(4, 4)$ 在直线 l 的右上方, 当 $\angle MAN = 60^\circ$ 时, 则直线 AM 的斜率为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

15. (13 分)

已知向量 $a = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $b = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.

(1) 若 $a \parallel b$, 求 θ 的值;

(2) 记 $f(\theta) = a \cdot b$, 求函数 $y = f(\theta)$ 的最小值和最大值及对应的 θ 的值.

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $4x + y - 4 = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

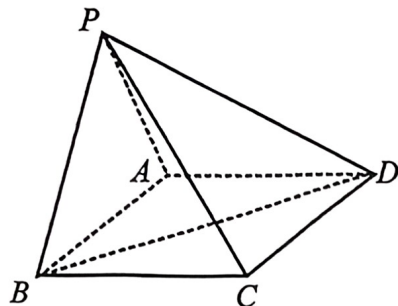
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(m, m+1)$ 有唯一极值点, 求 m 的取值范围.

17. (15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = PB$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 1$.

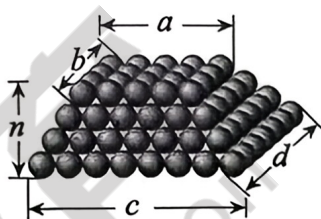
(1) 证明: $PC \perp BD$;

(2) 若三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.



18. (17 分)

北宋数学家沈括博学多才、善于观察. 据说有一天, 他走进一家酒馆, 看见一层层垒起的酒坛, 不禁想到: “怎么求这些酒坛的总数呢?” 经过反复尝试, 沈括提出对于上底有 ab 个, 下底有 cd 个, 共 n 层的堆积物 (如图), 可以用公式 $T_n = \frac{n}{6} [(2b+d)a + (b+2d)c] + \frac{n}{6}(c-a)$ 求出物体的总数, 这就是所谓的“隙积术”, 相当于求数列 $ab, (a+1)(b+1), (a+2)(b+2), \dots, (a+n-1)(b+n-1) = cd$ 的和.



(1) 若 $a=1, b=1$.

①求 T_6 的值;

②求 T_n .

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n^2 - 3n + 1$, 其前 n 项和记为 S_n . 数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_1 = 3$, 且 $b_{n+1} = b_n + 2 \times 3^n (n \geq 1)$. 将 $\{S_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的所有公共项按照它们在原数列中的

顺序组成一个新的数列 $\{c_n\}$. 设 $E_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{c_k} - 1}$, 证明: $E_n < 1$.

19. (17 分)

有 $2n$ 个人围坐在一个圆桌边上, 每人都越过桌面与另外一人握手, 若要求所有人握手时手臂互不交叉, 例如 $n=2$ 时 (如图), 一共有 4 个人, 以 1、2、3、4 表示, 握手两人用一条线连结, 共有 2 种方式. 记 $n=k$ 时, a_{2k} 表示满足条件的握手方法总数.

(1) 求 a_6, a_8 ;

(2) 已知 $n=5$, 把人顺时针标记为 1, 2, ..., 10, 在 1 和 2 握手的情况下, 求 9 和 10 握手的概率;

(3) 已知: 对任意 $m (m \in \mathbb{N}^*)$ 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_m$, 有 $E(\sum_{i=1}^m X_i) = \sum_{i=1}^m E(X_i)$. 当 $n=k$ 时, 随机变量 Y_{2k} 表示相邻两人握手的对数, 其期望记为 E_{2n} . 求 $E_2 \cdot E_4 \cdots E_{2n}$ (用 n 和 a_{2n} 表示).

