机密★启用前〔考试时间：2025年12月28日下午15:00－17:00〕

乐山市高中2023级第一次调查研究考试

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $U=\{x|x$ 是小于9的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{7,8\}$　　B. $\{0,7,8\}$　　C. $\{1,2,3,4,5,6\}$　　D. $\{1,2,4,5,6,7,8\}$

【答案】A

【解析】由题可知 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{7,8\}$.

【命题立意】改编自必修一P13例5，考查集合的基本运算，考查数学运算能力.

2. 已知复数 z 满足 $(1+2i)\bar{z}=4+3i$，则 $|z|=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

【答案】C

【解析】解法1：由题可知 $\bar{z}=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{10-5i}{5}=2-i$，所以 $z=2+i$，所以 $|z|=\sqrt{5}$.

解法2：由题可知 $\bar{z}=\frac{4+3i}{1+2i}$，所以 $|\bar{z}|=\frac{|4+3i|}{|1+2i|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以 $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{5}$.

【命题立意】改编自必修二P95T7，考查对复数模的理解，对复数四则运算的掌握及应用，考查数学运算能力.

3. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，使 $a>b$ 成立的一个充分不必要条件是

A. $a+c>b+c$　　B. $a^2>b^2$　　C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\lg a>\lg b$

【答案】D

【解析】选项 A，由不等式性质可得 $a+c>b+c$ 是 $a>b$ 的充要条件；选项 B，当 $a=1$，$b=-2$ 时，$a>b$，但此时 $a^2<b^2$，即 $a>b$ 不能推出 $a^2>b^2$，当 $a=-2$，$b=1$ 时，$a^2>b^2$，但此时 $a<b$，故 $a^2>b^2$ 是 $a>b$ 的既不充分也不必要条件；选项 C，当 $a<0$，$b>0$ 时 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故不可推出 $a>b$，当 $a>0$，$b<0$ 时不可推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 是 $a>b$ 的既不充分也不必要条件；选项 D，由指数函数的单调性知 $\lg a>\lg b$ 可推出 $a>b>0$，但当 a，b 中有一个非正数时不能推出 $\lg a>\lg b$，即 $\lg a>\lg b$ 是 $a>b$ 的充分不必要条件.

【命题立意】改编自必修一P23T2，考查充分条件与必要条件、不等式性质以及对数函数的性质，考查逻辑推理和运算求解能力.

4. 已知两条平行直线 l_1：$2x-y-1=0$，l_2：$6x-3y-2=0$，则 l_1 与 l_2 间的距离为

A. $\frac{\sqrt{5}}{45}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{15}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】B

【解析】解法1：l_1与x轴的交点$A(0,-1)$，点A到直线l_2的距离$d=\frac{|3-1|}{\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{15}$.

解法2：l_1：$6x-3y-3=0$，两平行线间的距离$d=\frac{|-3+2|}{\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{15}$.

【命题立意】改编自选必一P78例7，考查点到直线距离公式或两平行线间的距离公式，如何取点，决定了计算的复杂程度.

5. 已知函数$f(x)$是定义域为R的偶函数，当$x\geqslant0$时，$f(x)=x^2+4x$，若$f(a)>5$，则a的取值范围是

A. $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-5,5)$

【答案】B

【解析】因为$f(x)$为偶函数，则图象关于y轴对称，又$f(1)=5$，由图可知，$a<-1$或$a>1$.

【命题立意】改编自必修一P86T11，考查奇偶性.

6. 在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于原点对称．若$\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，则$\sin2\beta$的值为

A. $\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $-\frac{7}{25}$

【答案】C

【解析】解法1：由题意$\beta=\alpha+(2k+1)\pi$，$k\in Z$，从而$\sin2\beta=\sin2[\alpha+(2k+1)\pi]=\sin2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{7}{25}$

解法2：由$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，得$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，平方可得$\sin2\alpha=\frac{7}{25}$，

又$\beta=\alpha+(2k+1)\pi$，$k\in Z$，从而$\sin2\beta=\sin2[\alpha+(2k+1)\pi]=\sin2\alpha=\frac{7}{25}$.

【命题立意】改编自必修一P223T2，考查三角函数诱导公式，二倍角公式，两角差的余弦公式，同角三角函数基本关系.

7. 已知点$P(-2,-3)$，圆Q：$(x-4)^2+(y-2)^2=9$，以PQ为直径的圆与圆Q相交于A，B两点，则直线PA与圆Q的位置关系为

A. 相交　　B. 相离　　C. 相切　　D. 不确定

【答案】C

【解析】因为以PQ为直径的圆与圆Q相交于A，B两点，则$PA\perp QA$，所以PA与圆Q相切.

【命题立意】改编自选必一P99T14，考查圆与圆的位置关系，直线与圆的位置关系，考查抽象概括能力，逻辑推理能力.

8. 已知函数$f(x)=x\ln x-ax+b$的最小值为0，则

A. $a>b$　　B. $a\geqslant b$　　C. $a<b$　　D. $a\leqslant b$

【答案】D

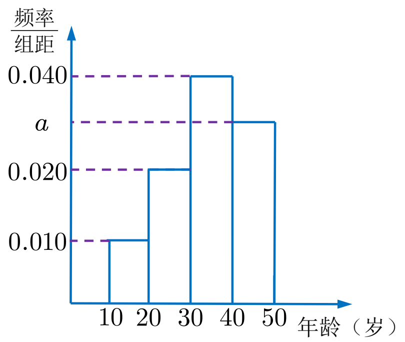
【解析】解法1：$f'(x)=\ln x+1-a$，令$f'(x)=0$，解得$x_0=e^{a-1}$，$f(x)_{min}=f(x_0)=b-e^{a-1}=0$，即$b=e^{a-1}$．由经典不等式知$e^{a-1}\geqslant a$，所以$a\leqslant b$.

解法2：由最小值的定义知，$f(1)\geqslant0$，解得$a\leqslant b$.

【命题立意】改编自选必二P94T2，考查函数的最值，体现多想少算.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 2025年9月20日，四川省城市足球联赛（简称“川超”）开幕式暨揭幕战观众达21448人．为了解各年龄层对“川超”的关注程度，随机选取了200名年龄在$[10,50]$的观众进行调查，并绘制如下的频率分布直方图，则



A. $a=0.03$　　　　B. 该场观众年龄众数的估计值为40

C. 该场观众年龄50%分位数的估计值为35　　　　D. 该场观众年龄平均数的估计值为35

【答案】AC

【解析】$(0.01+0.02+0.04+a)\times10=1$，所以$a=0.03$，$A$正确；众数估计值为$(30+40)\div2=35$，$B$错误；50%分位数估计值为$(0.5-0.3)\div0.04+30=35$，$C$正确；平均数估计值为$0.1\times15+0.2\times25+0.4\times35+0.3\times45=34$，$D$不正确（或直接由图可知）．

【命题立意】改编自必修二P198T1，结合实例与频率分布直方图，能用样本估计总体的集中趋势．

10. 已知函数$f(x)=2^x+x$，$g(x)=\log_2x+x$的零点分别为a，b，则下列说法正确的是

A. $a-b<0$　　B. $f(\log_2x)=g(x)$　　C. $f(a)<f(2a)$　　D. $a+b=0$

【答案】ABD

【解析】$f(x)$和$g(x)$的零点可以看成$y=2^x$和$y=\log_2x$分别与$y=-x$的交点的横坐标.由图象易得$a<0$，$b>0$，A正确；$f(\log_2x)=2^{\log_2x}+\log_2x=x+\log_2x$，$B$正确；$f(x)=2^x+x$在$\mathbf{R}$上单调递增，又$a>2a$得$f(a)>f(2a)$，$C$错误；由$A$知$f(\log_2b)=g(b)=f(a)$，由$B$易得$\log_2b=a$，又$\log_2b=-b$，所以$a+b=0$，$D$正确.

【命题立意】改编自必修一P160T5，考查基本初等函数的图象、函数零点与方程的解的关系，考查数形结合思想.

11. 已知曲线Γ：$\dfrac{y|y|}{4}-x|x|=1$，$A(0,2)$，$B(0,-2)$，$C(-\dfrac{3}{2}，1)$，$D(-\dfrac{1}{2}，3)$，$P(x,y)$为曲线Γ上不同于A的任意一点，则

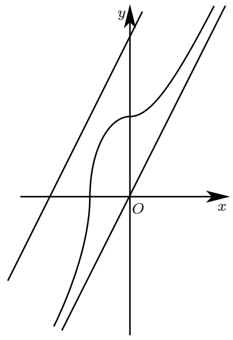
A. $y=2x$是曲线Γ的一条渐近线　　　　B. 直线PA与直线PB斜率之积为$\dfrac{1}{4}$

C. y是关于x的单调递增函数　　　　D. $\triangle PCD$面积的取值范围是$[2-\sqrt{2}，2)$

【答案】ACD

【解析】当$x>0$，$y>0$，表示双曲线$\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$第一象限部分；

当$x<0$，$y>0$，表示椭圆$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$第二象限部分；



当 $x<0$，$y<0$，表示双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 第三象限部分；

当 $x>0$，$y<0$，$-x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 不表示任何图形.

点 $(-1,0)$，$(0,2)$ 也在图象上．其图象如图所示

对于 A，Γ 在第一象限为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$，以 $y=2x$ 为渐近线，在第三限为双曲线 $\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$，也以 $y=2x$ 为渐近线，可知 Γ 以 $y=2x$ 为渐近线，故 A 正确.

对于 B，当点 P 在第二象限时，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{1}{4}$，当 P 在第一、三象限时，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{4}$．故 B 错误.

对于 C，$y=\begin{cases}-2\sqrt{x^2-1}, x<-1\\ 2\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1\\ 2\sqrt{x^2+1}, x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

对于 D，曲线上的点到直线 $2x+y-4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2x-y+4|}{\sqrt{5}}$.

根据双曲线方程可得第一、三象限双曲线的渐近线方程都是 $y=2x$，与直线 $2x-y+4=0$ 的距离为 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

曲线二四象限图象上的点到直线 $2x-y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2x-y+4|}{\sqrt{5}}$ 小于且无限接近 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

考虑曲线第一象限的任意点设为 $P(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 到 $2x-y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2\cos\theta-2\sin\theta+4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{5}}\geqslant\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，当 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时取等号，

所以 $d\in\left[\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$，则 $S_{\triangle PCD}=\dfrac{1}{2}|CD|\cdot d=\dfrac{\sqrt{5}}{2}d\in[2-\sqrt{2},\ 2)$.

【命题立意】改编自 2025 年高考上海卷 T15，以曲线方程为载体，考查椭圆与双曲线的简单性质，函数的基本性质，点到直线的距离，考查分类讨论思想、数形结合思想．考查直观想象，数学运算，逻辑推理素养.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=$ ______.

【答案】5

【解析】解法 1：由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$ 联立解得 $\boldsymbol{a}=\left(2,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=5$.

解法 2：$|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=5$

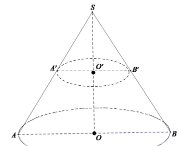
【命题立意】改编自必修二 P29 例 4，考查平面向量的坐标运算，体现多想少算.

13. 一个圆锥的底面直径为 4，高为 $2\sqrt{3}$，过圆锥高的中点作平行于底面的截面，该截面截去了一个圆锥，则剩下几何体的表面积为______.

【答案】11π

【解析】由已知有 $AO=2$，$SO=2\sqrt{3}$，则 $SA=\sqrt{AO^2+SO^2}=4$．且 $A'O'=\dfrac{1}{2}AO=1$，

$A'A=\frac{1}{2}SA=2$，$SO'=\frac{1}{2}SO=\sqrt{3}$，



故所求几何体的表面积为 $\pi\times(1^2+2^2+1\times2+2\times2)=11\pi$.

【命题立意】改编自必修二 P120T4，考查圆台的表面积，考查数学抽象、直观想象和数学运算的核心素养.

14. 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 M，N 两点（M 点在 N 点的左侧），点 $A(4,4)$ 在直线 l 的右上方，当 $\angle MAN=60^\circ$ 时，则直线 AM 的斜率为______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

则 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=-\frac{1}{2}$，从而 $y_1+y_2=-8$，

所以 $k_{AM}+k_{AN}=\frac{y_1-4}{x_1-4}+\frac{y_2-4}{x_2-4}=\frac{4}{y_1+4}+\frac{4}{y_2+4}=\frac{4(y_1+y_2)+32}{(y_1+4)(y_2+4)}=0$，

所以直线 AM 与直线 AN 关于 $x=4$ 对称，

因为 $\angle MAN=60^\circ$，所以直线 AM 与直线 AN 的斜率分别为 $\sqrt{3}$.

【命题立意】改编自 2011 年全国高中数学联赛 T11，以抛物线为载体，考查抛物线的简单性质，直线与抛物线的位置关系，考查数学运算能力，逻辑推理能力.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

15. (13 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$.

（1）若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 θ 的值；

（2）记 $f(\theta)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求函数 $y=f(\theta)$ 的最小值和最大值及对应的 θ 的值.

【答案】（1）由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，可得 $-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$. ……………………2 分

解得 $\tan\theta=-\sqrt{3}$. ……………………4 分

$\because\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$. ……………………6 分

（2）由 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………8 分

$\because\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. ……………………9 分

$\therefore$ 当 $\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)_{\max}=1$. ……………………11 分

当 $\theta-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $\theta=0$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$. ……………………13 分

【命题立意】改编自 2017 年江苏卷 T16，考查平面向量的运算、三角函数的图象及性质，考查运算求解能力.

16. (15 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+b$ 在点 $(0,b)$ 处的切线方程是 $4x+y-4=0$.

（1）求 a，b 的值；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(m,m+1)$ 有唯一极值点，求 m 的取值范围.

【答案】（1）$\because f(0)=b$, 点 $(0,4)$ 在切线 $4x+y-4=0$ 上，

$\therefore b=4$. ……………………………………………………………………………………2 分

$\because f'(x)=x^2+a$，则 $f'(0)=a$. ……………………………………………………4 分

$\therefore a=-4$. …………………………………………………………………………………6 分

（2）$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$. ………………………………………………………8 分

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 单调递增

当 $-2<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递增. ………………………………10 分

所以 -2 是函数 $f(x)$ 的极大值点，2 是函数 $f(x)$ 的极小值点. ……………………11 分

所以 $\begin{cases} m<-2 \\ -2<m+1<2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2<m<2 \\ m+1>2 \end{cases}$. ……………………………………13 分

所以 m 的取值范围是 $(-3,-2)\cup(1,2)$. …………………………………………………15 分

【命题立意】改编自选必二 P91 例 5，考查函数的单调性与极值.

17.（15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=PB$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$.

（1）证明：$PC\perp BD$；

（2）若三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$，求平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.

【答案】解法 1：（1）取 AB 中点 O，连接 PO，CO.

$\because PA=PB$，O 为 AB 的中点

$\therefore PO\perp AB$. ……………………………………………………………………………1 分

$\because$ 面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$，且面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$，

$PO\subset$ 面 PAB

$\therefore PO\perp$ 面 $ABCD$. ……………………………………………………………………2 分

又 $BD\subset$ 面 $ABCD$，则 $PO\perp BD$①. ………………………………………………3 分

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，则

$\tan\angle BCO=\dfrac{BO}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle BDC=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \tan\angle BCO=\tan\angle BDC$，从而 $\angle BCO=\angle BDC$(也可通过相似证明). ……………5 分

$\because \angle BDC+\angle DBC=90^\circ$

$\therefore \angle BCO+\angle DBC=90^\circ$，即 $BD\perp OC$②. …………………………………6 分

又 $\because PO$ 与 OC 为平面 POC 内的两条相交直线

$\therefore$ 由①②可得 $BD\perp$ 平面 POC. ……………………………………………………7 分

$\because PC\subset$ 平面 POC

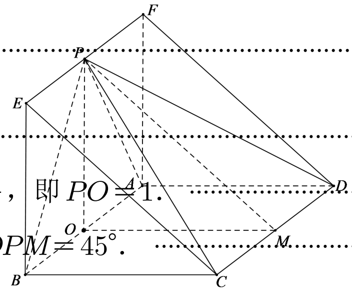
$\therefore BD\perp PC$. ……………………………………………………………………………8 分

（2）由平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$ 及 $ABCD$ 为矩形，

可将四棱锥 $P-ABCD$ 补成直三棱柱 $BEC-AFD$. …………………………………9 分

取 CD 中点 M，连接 PM，OM. ………………………………………………………10 分

$\because O$，P 分别为 AB，CD 的中点



$\therefore OP\perp EF$，$MP\perp EF$． ……………………………………………………………11 分

$\because$ 平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=EF$

$\therefore \angle OPM$ 为平面 PAD 与平面 PCD 的夹角． ……………………………………12 分

又 $\because V_{P-ABD}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，则 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AB\times AD\times PO=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，即 $PO=1$． ……………………13 分

在 $Rt\Delta POM$ 中，$PO=MO=1$，$\angle POM=90°$，则 $\angle OPM=45°$． ……………………14 分

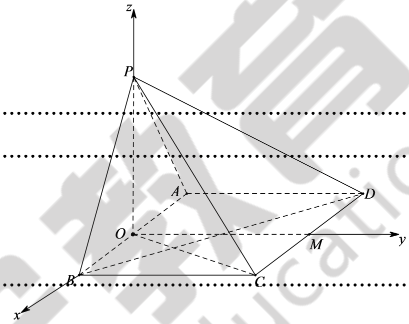
故平面 PAD 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ……………………………………15 分

解法 2：（1）取 AB 中点 O，连接 PO，CO；取 CD 中点 M，连接 OM．

$\because PA=PB$，O 为 AB 的中点

$\therefore PO\perp AB$． ……………………………………………………………………………1 分

$\because$ 面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$，且面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$，



$PO\subset$ 面 PAB

$\therefore PO\perp$ 面 $ABCD$． ……………………………………………………………………2 分

从而 $OP\perp OB$，$OP\perp OM$． ……………………………………………………………3 分

易知 $OM\perp OB$．

以 O 为原点，分别以 OB，OM，OP 所在直线为 x 轴，

y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系． ……………………………………………4 分

不妨设 $PO=t$，则

$P(0,0,t)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$． ……………………………5 分

$\therefore \overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,-t\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},1,0)$． ………………………………………6 分

$\therefore \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\sqrt{2})+1\times1+(-t)\times0=0$． ……………………………7 分

即 $PC\perp BD$． ……………………………………………………………………………8 分

（2）$\because V_{P-ABD}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，则 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AB\times AD\times PO=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，即 $PO=1$． ……………9 分

$\therefore P(0,0,1)$，从而 $\overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,-1\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,-1\right)$． ……………………10 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y-z=0\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y-z=0\end{cases}$，取 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$． ……………………………………12 分

取平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{OM}=(0,1,0)$． ……………………………………13 分

设平面 PAD 与平面 PCD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{OM},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\times\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

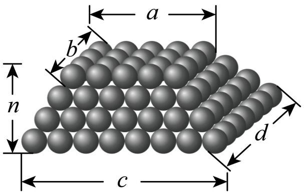
故平面 PAD 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ……………………………………15 分

【命题立意】改编自必修二 P171T14，考查线线垂直、面面垂直、平面与平面所成角，旨在打破学生对几何法和向量法的思维定势．

18. (17 分)

北宋数学家沈括博学多才、善于观察．据说有一天，他走进一家酒馆，看见一层层垒起的酒坛，

不禁想到："怎么求这些酒坛的总数呢？"经过反复尝试，沈括提出对于上底有 ab 个，下底有 cd 个，共 n 层的堆积物(如图)，可以用公式 $T_n=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(b+2d)c]+\frac{n}{6}(c-a)$ 求出物体的总数，这就是所谓的"隙积术"，相当于求数列 ab，$(a+1)(b+1)$，$(a+2)(b+2)$，…，$(a+n-1)(b+n-1)=cd$ 的和.



（1）若 $a=1$，$b=1$，

①求 T_6 的值；

②求 T_n.

（2）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n^2-3n+1$，其前 n 项和记为 S_n.数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，且 $b_{n+1}=b_n+2\times3^n(n\geqslant1)$.将 $\{S_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的所有公共项按照它们在原数列中的顺序组成一个新的数列 $\{c_n\}$.设 $E_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{c_k}-1}$，证明：$E_n<1$.

【答案】(1)①由 $a=1$，$b=1$，$n=6$，可知 $c=a+6-1=6$，$d=b+6-1=6$

代入公式得 $T_6=\frac{6}{6}[(2+6)\times1+(1+12)\times6]+\frac{6}{6}(6-1)=91$. ……3分

②令 $a=1$，$b=1$，$c=n$，$d=n$，

则 $T_n=\frac{n}{6}[(2+n)+(1+2n)n]+\frac{n}{6}(n-1)=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. ……6分

(2)由（1）可知 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

由 $a_n=3n^2-3n+1$，得 $S_n=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)-3(1+2+\cdots+n)+n$. ……7分

$\therefore S_n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)+n=n^3$. ……8分

由 $b_{n+1}=b_n+2\times3^n$，得 $b_{n+1}-b_n=2\times3^n$.

所以 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=2(3+3^2+\cdots+3^{n-1})+3$ ……9分

$=\frac{2\times3(1-3^{n-1})}{1-3}+3=3^n$. ……11分

设数列 $\{3^n\}$ 中的第 m 项等于数列 $\{n^3\}$ 中的第 k 项，即 $3^m=k^3$，则 3^m 是数列 $\{c_n\}$ 中的项.

$\because 3^{m+1}=3\cdot3^m=3k^3$ 不是数列 $\{c_n\}$ 中的项，

$3^{m+2}=3^2\cdot3^m=3^2k^3$ 不是数列 $\{c_n\}$ 中的项，

$3^{m+3}=3^3\cdot3^m=(3k)^3$ 是数列 $\{c_n\}$ 中的项，

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 是以 3^3 为首项，3^3 为公比的等比数列.

$\because c_n=3^{3n}$. ……13分

解法1：$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{c_n}-1}=\frac{1}{3^n-1}=\frac{3^{n+1}-1}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}<\frac{3^{n+1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$.

……15分

故 $E_n<\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^1-1}-\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)<\frac{3}{4}<1$.

……17分

解法2：$\because \frac{1}{\sqrt[3]{c_n}-1}=\frac{1}{3^n-1}<\frac{2}{3^n}$. ……15分

$\therefore E_n<2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})=2\times\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=1-(\frac{1}{3})^n<1$. ……17分

【命题立意】改编自选必二P43阅读，考查等差（比）数列前n项和公式、递推数列、累加法、裂项求和法、放缩法，考查学生的信息获取能力、运算求解能力、逻辑推理能力、数学建模能力.

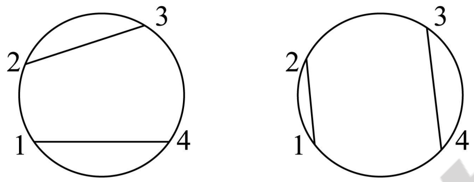
19. (17 分)

有 $2n$ 个人围坐在一个圆桌边上，每人都越过桌面与另外一人握手，若要求所有人握手时手臂互不交叉，例如 $n=2$ 时（如图），一共有 4 个人，以 1、2、3、4 表示，握手两人用一条线连结，共有 2 种方式．记 $n=k$ 时，a_{2k} 表示满足条件的握手方法总数．

（1）求 a_6，a_8；

（2）已知 $n=5$，把人顺时针标记为 1，2，…，10，在 1 和 2 握手的情况下，求 9 和 10 握手的概率；

（3）已知：对任意 $m(m\in\mathbf{N}^*)$ 个随机变量 X_1，X_2，…，X_m，有 $E\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)=\sum_{i=1}^{m}E(X_i)$．当 $n=k$ 时，随机变量 Y_{2k} 表示相邻两人握手的对数，其期望记为 E_{2n}．求 $E_2\cdot E_4\cdots\cdot E_{2n}$（用 n 和 a_{2n} 表示）．



【答案】（1）当 $n=3$ 时，按顺时针方向把人标记为 1，2，3，4，5，6，用 (i,j) 表示 i 和 j 握手．

若 1 和 2 握手，共有两种方法：$(3,4)$，$(5,6)$ 和 $(3,6)$，$(4,5)$；

若 1 和 6 握手，共有两种方法：$(2,3)$，$(4,5)$ 和 $(2,5)$，$(3,4)$；

若 1 和 4 握手，共有 1 种方法：$(2,3)$，$(5,6)$．

所以，$a_6=1+2+2=5$．……2 分

当 $n=4$ 时，按顺时针方向把人标记为 1，2，3，4，5，6，7，8，用 (i,j) 表示 i 和 j 握手．

若 1 和 2 握手，剩下 6 人，情况同 $n=3$，共 5 种方法；

若 1 和 8 握手，由对称性，情况同 1 和 2 握手，共 5 种方法；

若 1 和 4 握手，则 2 和 3 握手，剩下 4 人，共 2 种方法；

若 1 和 6 握手，由对称性，情况同 1 和 4 握手，共 2 种方法；

所以，$a_8=5+5+2+2=14$ 种方法．……6 分

（2）设 $A=$“1 和 2 握手”，$B=$“9 和 10 握手”．

$\because n(A)=a_8=14$，$n(AB)=a_6=5$，

所以 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{5}{14}$．……9 分

（3）记 $X_i=\begin{cases}1,\text{若}i\text{和}i+1\text{握手},\\0,\text{若}i\text{和}i+1\text{不握手},\end{cases}$ $i=1$，2，…，$2n$，其中 $2n+1$ 表示第 1 个人．

i 和 $i+1$ 握手时，情况和 $2n-2$ 个人时一样，共 a_{2n-2} 种方法，

则 $P(X_i=1)=\dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}}$，$E(X_i)=\dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}}$．……12 分

$\therefore E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{2n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{2n}E(X_i)=2n\cdot\dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}}$．……15 分

$\therefore E_2\cdot E_4\cdots\cdot E_{2n}=\left(2\cdot2\cdot\dfrac{a_2}{a_4}\right)\cdot\left(2\cdot3\cdot\dfrac{a_4}{a_6}\right)\cdots\left(2n\cdot\dfrac{a_{2n-2}}{a_{2n}}\right)=\dfrac{2^{n-1}n!}{a_{2n}}$．……17 分

【命题立意】原创题，考查古典概型、条件概率、期望，考查逻辑推理能力、运算求解能力、数学建模能力、创新能力．